

Info: typo dans l'exemple 1.27 (i) $\sin(2x)$

Rappel: Méthode des coefficients indéterminés: $y' + ay = q(x)$

On cherche y_p de la même forme que $q(x)$

(! ça fonctionne si $p(x) \equiv \text{cte}$)

Exemple 1.27 (ii) Problème

$$y' + 2y = e^{-2x} \quad y_h = C e^{-2x} \quad C \in \mathbb{R}$$

$$y_p(x) = \alpha_0 e^{-2x} \Rightarrow e^{-2x} = y_p'(x) + 2y_p(x) = 0 \quad \ddots$$

Questions: - Comment savoir que ça ne va pas fonctionner?
- Comment réparer?

Méthode 1.28 (Séparation des variables sur l'équation homogène + coeffs indéterminés, cas où $q(x)$ ressemble y_a)

Soit $y' + a \cdot y = q(x)$ EDO d'ordre 1 linéaire à coefficients constants

Supposons que $q(x)$ a la forme

$$q(x) = \xi_0 \cdot e^{-a \cdot x} + \xi_1 \cdot x \cdot e^{-a \cdot x} + \dots + \xi_n \cdot x^n \cdot e^{-a \cdot x} \quad (\xi_i \in \mathbb{R}; \lambda = -a)$$

Étape 1: Solution générale de l'équation homogène par séparation des variables: $y_a: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $y_a(x) = C e^{-a \cdot x}$, $C \in \mathbb{R}$.

Étape 2: Solution particulière de l'équation par coefficients indéterminés.

$$\cancel{\alpha_0 e^{-ax}} + \alpha_1 x \cdot e^{-ax} + \dots + \alpha_n x^n e^{-ax} + \alpha_{n+1} x^{n+1} e^{-ax}$$

$y_h \rightarrow y_p(x) = \alpha_1 x \cdot e^{-ax} + \dots + \alpha_n x^n e^{-ax} + \alpha_{n+1} x^{n+1} e^{-ax}$

qu'on injecte dans l'équation et on trouve les α_i pour que y_p soit une solution. Pour finir,

$y = y_h + y_p$ est la solution générale.

Remarque 1.29

La méthode ci-dessus "corrige" la méthode 1.26, ligne 3 quand $\lambda = -a$. On devrait aussi corriger la méthode

1.26 ligne 1 quand $a=0$, mais l'équation est alors $y' = \varphi(x)$, qu'on résout par intégration directe.

Exemple 1.30 (i) soit l'EDO $y' + 2y = e^{-2x}$

Étape 1 $y_h(x) = C e^{-2x}$

Étape 2 $q(x) = e^{-2x} \rightarrow \cancel{\alpha_0 e^{-2x}} + \alpha_1 \cdot x \cdot e^{-2x}$
 $\uparrow$
 y_h

On cherche y_p de la forme $y_p(x) = \alpha_1 \cdot x \cdot e^{-2x}$

On a alors, $y_p'(x) = \alpha_1 \cdot e^{-2x} - 2\alpha_1 \cdot x \cdot e^{-2x}$

Et donc pour que y_p soit une solution de l'équation:

$$q(x) = e^{-2x} = \underline{y_p'(x)} + \underline{2y_p(x)} = \underline{\alpha_1 \cdot e^{-2x} - 2\alpha_1 \cdot x \cdot e^{-2x}} + \underline{2 \cdot \alpha_1 \cdot x \cdot e^{-2x}}$$

$$= \alpha_1 \cdot e^{-2x}$$

$$\Rightarrow \alpha_1 = 1,$$

$$y_p(x) = x e^{-2x}.$$

On conclut que la solution générale est $y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $y(x) = y_p(x) + y_h(x) = x e^{-2x} + C \cdot e^{-2x}$.

(ii) Soit l'EDO $y' - 3y = 4x e^{3x}$

Étape 1: solution générale de l'équation homogène.

$$y_h(x) = C e^{3x}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Étape 2: coeff indéter.

$$q(x) = 4x e^{3x} = \sum_0 \cdot e^{3x} + \sum_1 \cdot x \cdot e^{3x}$$

(u. 1.25, ligne 3)

$$\text{avec } \sum_0 = 0, \quad \sum_1 = 4.$$

$$\rightarrow \cancel{\alpha_0 e^{3x}} + \alpha_1 x \cdot e^{3x} + \alpha_2 x^2 \cdot e^{3x}$$

y_h

$$\Rightarrow y_p(x) = \alpha_1 x \cdot e^{3x} + \alpha_2 x^2 \cdot e^{3x}$$

On a alors,

$$y_p'(x) = \alpha_1 \cdot e^{3x} + 3\alpha_1 \cdot x \cdot e^{3x} + 2\alpha_2 \cdot x \cdot e^{3x} + 3\alpha_2 \cdot x^2 \cdot e^{3x}$$

$$= \alpha_1 \cdot e^{3x} + (3\alpha_1 + 2\alpha_2) \cdot x \cdot e^{3x} + 3\alpha_2 \cdot x^2 \cdot e^{3x}$$

On a besoin:

$$q(x) = 4xe^{3x} = y_p'(x) - 3y_p(x) = \alpha_1 \cdot e^{3x} + (3\alpha_1 + 2\alpha_2) \cdot x \cdot e^{3x} + 3\alpha_2 x^2 e^{3x}$$

$$= \alpha_1 e^{3x} + 2\alpha_2 x \cdot e^{3x} - 3(\alpha_1 x \cdot e^{3x} + \alpha_2 x^2 e^{3x})$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 0 \\ 2\alpha_2 = 4 \end{cases} \Rightarrow \alpha_1 = 0, \alpha_2 = 2$$

$$\Rightarrow y_p(x) = 2x^2 e^{3x}$$

On conclut que la solution générale est $y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $y(x) = 2x^2 e^{3x} + Ce^{3x}$, $C \in \mathbb{R}$

Remarque 1.31 :

Le gros avantage des coeff. indéter. est qu'on trouve y_p sans calculer la méthode primitive.

Proposition 1.32 (Principe de superposition)

Soit l'EDO linéaire d'ordre 1: $y' + p(x)y = q_1(x) + q_2(x)$

Si y_1 et y_2 sont respectivement solution de

$$y_1' + p(x)y_1 = q_1(x) \quad \& \quad y_2' + p(x)y_2 = q_2(x)$$

Alors, $y = y_1 + y_2$ est solution de

$$y' + p(x)y = q_1(x) + q_2(x).$$

Exemple 1.33 :

Soit l'EDO $y' - 2y = \underbrace{2xe^{2x}}_{\substack{\hookrightarrow \text{coeffs} \\ \text{indéter.} \\ \text{ligne 3}}} - \underbrace{2x^2 + 2x + 2}_{\substack{\hookrightarrow \text{coeffs} \\ \text{indéter.} \\ \text{ligne 1}}}$

Étape 1 Solution de l'équation homogène, $y_h(x) = Ce^{2x}$, $C \in \mathbb{R}$

Étape 2 $y_{p,1}$ solution particulière de $y' - 2y = 2xe^{2x}$

$y_{p,2}$ solution particulière de $y' - 2y = -2x^2 + 2x + 2$

$y_{p,1}$ coeff: $\cancel{\alpha_0 \cdot \underbrace{e^{2x}}_{y_h}} + \alpha_1 \cdot x \cdot e^{2x} + \alpha_2 \cdot x^2 \cdot e^{2x}$ (ligne 3)

$$y_{p,1}(x) = \alpha_1 \cdot x \cdot e^{2x} + \alpha_2 \cdot x^2 \cdot e^{2x}$$

On a besoin

$$2xe^{2x} = y_{p,1}'(x) - 2y_{p,1}(x) = \alpha_1 \cdot e^{2x} + 2\alpha_2 \cdot x \cdot e^{2x}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 0 \\ 2\alpha_2 = 2 \end{cases} \Rightarrow \alpha_1 = 0, \alpha_2 = 1,$$

$$y_{p,1}(x) = x^2 e^{2x}$$

$y_{p,2}$ coeff. indéterminés : $\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2$

pas de y_h !

$$\Rightarrow y_{p,2}(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2$$

On a besoin

$$-2x^2 + 2x + 2 = y_{p,2}'(x) - 2y_{p,2}(x)$$

$$= -2\alpha_2 x^2 + (2\alpha_2 - 2\alpha_1)x + \alpha_1 - 2\alpha_0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -2\alpha_2 = -2 \\ 2\alpha_2 - 2\alpha_1 = 2 \\ \alpha_1 - 2\alpha_0 = 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \alpha_0 = -1, \alpha_1 = 0, \alpha_2 = 1$$

$$\Rightarrow y_{p,2}(x) = -1 + x^2$$

pour finir, la solution générale de l'équation est
 $y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\begin{aligned} y(x) &= y_{p,1}(x) + y_{p,2}(x) + y_h(x) \\ &= x^2 e^{2x} - 1 + x^2 + C e^{2x}, \quad C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

$$y_1 = x^2 e^{2x} + C_1 e^{2x}, \quad y_2 = -1 + x^2 + C_2 e^{2x}$$

$$\Rightarrow y = x^2 e^{2x} - 1 + x^2 + \underbrace{(C_1 + C_2)}_{\checkmark} e^{2x}$$

§1.4: EDOs du 2^d ordre linéaires à coefficients constants.

Définition 1.34 (EDO du 2^d ordre linéaire à coefficients constants)

Soit $E(x, y, y', y'') = 0$ une EDO d'ordre 2.

On dit que l'EDO est linéaire à coefficients constants si $\exists a \in \mathbb{R}^*$, $b, c \in \mathbb{R}$ tq l'EDO s'écrit $a \cdot y'' + b y' + c y = q(x)$ et une fonction $q(x)$

De plus, si $q = 0$, l'équation est dite homogène,
et si $q \neq 0$, l'équation est dite inhomogène.

Définition 1.35 (Solutions linéairement indépendantes)

Soit $ay'' + by' + cy = 0$ une EDO d'ordre 2, linéaire à coefficients constants homogène, $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalle ouvert et $y_1, y_2 \in C^1(I)$ deux solutions de l'équation.

On dit que y_1 et y_2 sont linéairement dépendantes

si $\exists \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ pas tous deux nuls tq $\forall x \in I$,
 $\alpha y_1(x) + \beta y_2(x) = 0$

On dit que y_1 et y_2 sont linéairement indépendantes

si $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\left\{ \begin{array}{l} \forall x \in I \\ \alpha y_1(x) + \beta y_2(x) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \alpha = \beta = 0.$

Remarque 1.36

(i) Comme pour les EDOs linéaires d'ordre 1,

$L: C^2(I) \rightarrow C^0(I)$ définie par $L(y) = ay'' + by' + cy$ est une application linéaire.

La solution générale de l'EDO a donc la forme

$y = y_p + y_h$ où y_p est une solution de $ay'' + by' + cy$

$= q(x)$ et y_h représente la solution générale

de l'équation homogène $ay'' + by' + cy = 0$

($\Leftrightarrow y_h \in \text{Ker } L$)

EDO d'ordre 2 $\Rightarrow \text{Ker } L$ est de dimension 2,

la solution générale de l'équation homogène

a la forme $y_h = C_1 y_1 + C_2 y_2$ où y_1 & y_2
sont 2 solutions linéairement indépendantes de l'équation
homogène.

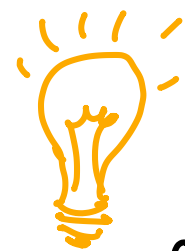
Proposition 1.37 / remarque 1.38 (Comment trouver 2 solutions
lin. indépendantes de l'équation homogène)
soient $a \in \mathbb{R}^*$, $b, c \in \mathbb{R}$ et l'EDO d'ordre 2 à coeffs const.
linéaire, homogène

$$a \cdot y'' + b y' + c y = 0$$

Considérons le polynôme caractéristique:

$$P(\lambda) = a \cdot \lambda^2 + b \lambda + c$$

Alors, on distingue 3 cas:



$$\begin{aligned} y(x) &= e^{\lambda x} \\ \Rightarrow a \cdot y'' + b y' + c y &= \\ & \underbrace{(a \cdot \lambda^2 + b \cdot \lambda + c) e^{\lambda x}}_{=0 \text{ est intéressant}} \end{aligned}$$

Cas 1: $b^2 - 4ac > 0$ et p a 2 racines réelles distinctes: λ_1, λ_2 .

Alors, $y_1(x) = e^{\lambda_1 x}$, $y_2(x) = e^{\lambda_2 x}$ sont deux solutions lin. indép. de l'équation homogène.

Cas 2: $b^2 - 4ac = 0$ et p a 1 racine double λ .

Alors, $y_1(x) = e^{\lambda x}$, $y_2(x) = x \cdot e^{\lambda x}$ sont deux solutions lin. indép. de l'équation homogène.

Cas 3: $b^2 - 4ac < 0$ et p a 2 racines complexes conjuguées: $\lambda + i\mu$ & $\lambda - i\mu$.

Alors, $y_1(x) = e^{\lambda x} \sin(\mu x)$, $y_2(x) = e^{\lambda x} \cos(\mu x)$

sont deux solutions linéairement indépendantes de
l'équation homogène.